A FORMAÇÃO INICIAL E OS CONCEITOS SOBRE DOIS TEMAS CONTROVERSOS NA PRÁTICA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: INDETERMINAÇÃO E DIVISÃO POR ZERO

Rogério Starich Silva
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
rogerio.starich@ufvjm.edu.br

Resumo:
Esse trabalho é parte de uma pesquisa sobre os conceitos de números e operações que os estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri possuem. Nessa etapa, examinou-se as duas primeiras questões de um teste contendo dez questões. O objetivo era explorar alguns aspectos da compreensão desses estudantes sobre dois assuntos da matemática escolar, a indeterminação do tipo zero elevado a zero e a divisão por zero. A amostra da pesquisa compreendeu aproximadamente 42% dos estudantes matriculados no curso, com uma distribuição amostral que contemplava, representativamente, todos os períodos de matrícula existentes no curso no momento da pesquisa. Os resultados apontaram que a maioria dos estudantes optam por fundamentar suas explicações para os casos pesquisados exclusivamente em regras memorizadas na educação básica e as disciplinas cursadas não interferiram significativamente nos conceitos que eles já possuíam.
Palavras-chave: Conceitos; indeterminação; divisão por zero; formação inicial.

1. Introdução

Quando se trata da formação do professor de matemática, surgem várias discussões sobre o que é realmente necessário para promover tal formação. Algumas dessas discussões são tradicionalmente dialéticas e tem, segundo Fiorentini e Oliveira (2013), fundamento numa tricotomia entre formação matemática, formação didático-pedagógica e prática profissional. Para se romper com essa tradição tricotômica são sugeridas algumas mudanças em relação à prática e à pesquisa da formação de professores, mudanças que devem ser orientadas pela problemática e por investigações que confrontem a formação na licenciatura e a complexidade da prática da matemática escolar.

Nesse sentido, Moreira e David (2007) apresentam uma divergência entre a *matemática acadêmica* e a *matemática escolar*, onde definem a *matemática acadêmica* como aquela que é reproduzida no ensino superior proveniente dos trabalhos de matemáticos, cujo os tipos de objetos com os quais se trabalha, os níveis de abstração em que se colocam as questões e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que haja ênfase nas estruturas abstratas, no processo rigorosamente lógico-dedutivo e na extrema precisão de linguagem. Enquanto que a *matemática escolar* é aquela que é essencial ao professor de matemática da educação básica, desenvolvida num contexto educativo, com definições mais descritivas, com formas alternativas de demonstrações mais acessíveis ao aluno em cada um dos estágios escolares, usando-se de argumentações, apresentações de conceitos ou resultados variados, fazendo reflexão profunda sobre a origem dos erros dos alunos, etc.

Os reflexos de tal divergência são sensíveis nos resultados de trabalhos como o de Ball (1988) e o de Moreira (2004), revelando que muitos professores e estudantes de licenciatura possuem dificuldades com alguns conceitos de matemática elementar que são necessários a sua prática escolar e que a formação obtida pouco contribuiu para o exercício de tal prática. Por esse motivo, os professores recorrem aos conceitos provenientes da sua própria educação básica, anterior ao curso superior, para o exercício profissional, conforme afirma Klein (2009):

> Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p. 1)

Partindo desse contexto, foi empreendida uma pesquisa acerca dos conceitos de números e operações que os estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática possuem e como esses conceitos se manifestam nos períodos letivos desse curso. O presente trabalho é apenas uma das partes dessa pesquisa e, nessa etapa buscou-se verificar como os estudantes do curso lidam, especificamente, com dois temas pertinentes à prática escolar, os quais são: a indeterminação numérica do tipo 0^0 e a divisão por zero. Estes temas foram escolhidos pelo fato de Lima (1991) afirmar que são temas controversos da educação básica, ou seja, sobre os quais costumam ocorrer dúvidas e divergências.

O principal objetivo foi observar se os estudantes mais avançados do curso em questão desenvolveram conceitos mais consolidados sobre esses dois temas do que os ingressantes do curso e, caso isso ocorresse, verificar-se-ia a partir de qual momento do curso isso se daria.

A pesquisa realizada teve um caráter exploratório, com aplicação de um teste de dez questões a 55 estudantes matriculados no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri porém, essa etapa da pesquisa examinou as respostas obtidas a somente duas dessas questões do teste. Para tanto, foram utilizados os setes aspectos do conhecimento de um determinado assunto em matemática (EVEN, 1990).

2. Os sete aspectos do conhecimento de um determinado assunto matemático

No sentido de examinar, na medida do possível, os conceitos que os futuros professores possuem sobre os números e suas operações surgiram as seguintes questões: Como identificar o conhecimento que os futuros professores de matemática possuem sobre números e operações? Que conhecimentos eles possuem sobre como ensinar tais assuntos?

Responder tais questões não é fácil pois envolve, dentre outros fatores, a subjetividade intrínseca a cada indivíduo. Então, a estratégia adotada no trabalho foi empregar um quadro teórico de Even (1990) para fundamentar a identificação e a classificação das informações obtidas sob sete aspectos concernentes ao conhecimento de um determinado conteúdo matemático, os quais são justificados pela autora da seguinte maneira:

> O tema *conhecimento do professor sobre um assunto específico da matemática* é influenciado pelo que eles sabem em diferentes domínios do conhecimento. Portanto, a análise do tema *conhecimento do professor sobre um assunto específico da matemática* deveria integrar: os vários corpos de conhecimento; o papel e importância do tema na matemática e no currículo de matemática; a pesquisa e o trabalho teórico sobre a aprendizagem, conhecimento e compreensão de conceitos matemáticos de um tema geral e de um tópico específico; a pesquisa e o trabalho teórico sobre o conhecimento dos professores e seu papel no ensino. A análise deve também ter em conta a população específica em consideração. Como resultado desta análise, os sete aspectos seguintes pareciam formar as principais facetas do tema

conhecimento do professor sobre um assunto específico da matemática. (EVEN, 1990, p. 523, tradução e grifo nosso.)

Isso indica que o conhecimento sobre os números e suas operações, examinados no contexto da formação de professores e sob a ótica dos sete aspectos dessa autora, vai além dos conceitos e definições e permeia também a prática de ensino e a visão profissional de tal prática. Os sete aspectos foram assimilados, em linhas gerais, no Quadro 1:

Quadro 1 - Sete aspectos do conhecimento de um assunto matemático

Aspecto	Descrição
1. Características essenciais	Ligado à imagem ou conjunto de imagens mentais que já foram associadas ao conceito na mente da pessoa, juntamente com o conjunto de propriedades que foram associados mentalmente ao conceito.
2. Diferentes representações	Refere-se às diferentes formas e notações que um conceito complexo pode manifestar ao longo das numerosas divisões da matemática. Diferentes representações dão diferentes percepções que permitem uma compreensão melhor, mais profunda, mais poderosa e mais completa de um conceito.
3. Formas alternativas de abordagem	As diferentes maneiras de abordar um conteúdo, diversificando as representações, os significados e as notações permitem a escolha da maneira mais adequada de abordagem para cada situação de ensino.
4. Relevância do conceito	Se um conceito abre novas possibilidades, ele ganha uma importância dentre os outros, mas se um conteúdo for visto de modo simplista, não tornará possível que outros subtópicos sejam compreendidos.
5. Repertório básico	Para cada tópico matemático é necessário que se conheça e tenha de fácil acesso a exemplos específicos que ilustrem princípios importantes, propriedades, teoremas, etc. Mas não quer dizer que seja algo simplesmente memorizado e utilizado sem entendimento, é necessário que ele dispare insights e uma compreensão mais profunda do conteúdo.
6. Entendimento e compreensão do conceito	A compreensão de um novo conceito é caracterizada pela ligações cognitivas estabelecidas entre ele e os demais conceitos já existentes na estrutura cognitiva do sujeito.
7. Conhecimento da Natureza da Matemática	É um conhecimento mais geral que orienta a construção e utilização dos conhecimentos e dos processos pelos quais as verdades matemáticas são estabelecidas.

Fonte: adaptado de EVEN (1990, p. 523-527)

Partindo desse quadro teórico, foi possível elaborar o instrumento de coleta de dados buscando identificar não somente o conhecimento de conteúdo específico que os sujeitos da amostra apresentavam, mas também a forma como eles lidam com esse conhecimento numa possível situação de ensino.

3. A metodologia

A pesquisa foi do tipo exploratória pois, segundo Gil (2009), esse tipo de pesquisa possibilita a familiarização com um problema, provocando a construção de hipóteses e tornando o problema mais explícito e patente. Dessa forma, fez-se a abordagem qualitativa dos dados obtidos por meio de duas questões de um teste aplicado a um grupo de estudantes. Esse instrumento de coleta de dados conteve dez questões abertas, uma delas versando sobre indeterminação em potenciação e a outra sobre divisão por zero, as quais foram utilizadas nesse trabalho, conforme serão apresentadas mais adiante.

A população da amostra foi constituída de 55 estudantes que aceitaram o convite em participar da pesquisa, representando um quantitativo de 42% dos estudantes matriculados no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, cuja distribuição amostral contemplou todos os períodos de matrícula do ano de 2009 ao ano de 2015. A grade curricular vigente nesse período previa um tempo mínimo de integralização curricular de 9 semestres letivos por isso, os estudantes que estavam matriculados a partir do 9º período foram incluídos num grupo denominado Concluintes.

Utilizou-se o período de matrícula como uma variável para identificar em qual momento do curso haveria alguma alteração nos conceitos manifestados pelos estudantes e, assim, seria constatada a contribuição do curso sobre a formação dos sujeitos especificamente nos aspectos avaliados pelas questões do teste.

As respostas obtidas foram examinadas de acordo com o quadro teórico dos sete aspectos (EVEN, 1990) para a discussão dos resultados.

4. Os resultados

Na Questão 1 a seguir, pretendeu-se apurar principalmente, o aspecto do *conhecimento da natureza da Matemática* onde o estudante poderia verificar a validade matemática das afirmações contidas nessa questão, revelando assim que as afirmações I e III são falsas e que apenas a afirmação II é verdadeira. Almejou-se observar também, sob o aspecto do *repertório básico*, se as justificativas utilizadas pelos estudantes estariam fundamentadas em princípios importantes, propriedades ou teoremas. Além disso, era esperado que fossem adotadas *formas alternativas de abordagem* do assunto de potenciação e que a indeterminação do tipo "zero elevado a zero" fosse manifestada nas respostas ao item (b) pois, uma vez confrontadas, as afirmações I e III produzem resultados diferentes no caso 0^0.

Questão 1

Durante uma aula sobre potenciação, um professor do ensino fundamental fez as seguintes afirmações:

I- Todo número elevado a zero é igual a um, por exemplo: $3^0 = 1$, $8^0 = 1$ *ou* $1000^0 = 1$

II- Todo número elevado a um é igual a ele próprio, por exemplo: $2^1 = 2$, $5^1 = 5$ *ou* $1000^1 = 1000$.

III- Zero elevado a qualquer número é igual a zero, por exemplo: $0^2 = 0$, $0^5 = 0$ *ou* $0^{100} = 0$.

(a) Você já ouviu ou utilizou alguma dessas regras? Caso afirmativo, qual?

(b) Você explicaria de outra maneira as afirmações efetuadas pelo professor? Caso afirmativo, justifique.

Nas respostas obtidas ao item (a), 53 dos 55 participantes afirmaram ter ouvido ou utilizado as regras tais como lhe foram apresentadas. Isso evidencia que há um uso indiscriminado dessas regras e que, mesmo estando as afirmações I e III matematicamente incorretas, elas são propagadas ou memorizadas pela maioria dos estudantes em algum momento da vida escolar.

Das respostas ao item (b), nenhum dos participantes confrontou as afirmações I e III da questão de modo a manifestar o aspecto do *conhecimento da natureza da Matemática* pois, mesmo demonstrando compreender parcialmente o significado da operação de potenciação, eles não conseguiram explicar o caso da indeterminação 0^0. Apenas 3 estudantes detectaram alguma discrepância na afirmação I, mas não conseguiram indicar a indeterminação (ocorrendo até a negação da sua existência), conforme pode-se ver na transcrição das respostas a seguir:

> *Exemplo 1*
>
> Sim. A I se caso a pessoa leve ao pé da letra ele poderá afirmar que $0^0 = 1$ o que é um absurdo, então eu diria que um número elevado a 0 que seja diferente de 0 é igual a 1 . (Estudante 2, 1º Período)
>
> *Exemplo 2*

> Sim, a afirmativa I diz que todo número elevado a 0 é 1. Na verdade é: Todo número elevado a zero exeto [SIC] o próprio zero, é igual a um, pois 0^0 não existe. (Estudante 5, 3º Período)
>
> *Exemplo 3*
>
> Sim, na primeira eu diria que nem todo número elevado a zero é um. Pois zero elevado a zero não é um. (Estudante 6, 3º Período)

Esses estudantes nada mencionaram em relação à afirmação III, talvez por julgá-la correta ou simplesmente por falta de atenção. Porém, apenas um único estudante concluinte do curso utilizou o termo indeterminação para responder ao item (b), cuja resposta é "Apenas uma observação: na III pois da forma que está escrita pode também ser usado 0^0 que é uma indeterminação." (Estudante 13, Concluinte). Apesar de identificar a indeterminação, ele não confrontou as afirmações I e III e não elaborou uma explicação melhor.

Em relação ao aspecto das *formas alternativas de abordagem*, apareceram apenas duas tentativas de demonstração , transcritas a seguir:

> *Exemplo 1*
>
> A I explicaria utilizando regras de potência, ou seja, "divisão de dois números de mesma base conserva-se a base e subtrai-se os expoentes"
>
> Ex: Seja $a, b \ \in R$, tal que $\frac{a^b}{a^b} = 1$, pois $a^{b-b} = a^0 = 1$ e um número dividido por ele mesmo é 1. Essa seria uma forma de justificar. (Estudante 12, Concluintes)
>
> *Exemplo 2*
>
> A I explicaria de forma diferente como já fiz uma vez para turma do 1º ano do E.M. Demonstraria através das regras de potenciação o porque de todo número elevado a zero é igual a um.
>
> Ex: $a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = \left(\frac{a}{a}\right)^n = 1^n = 1.$ (Estudante 14, Concluintes)

Em ambos os exemplos, os estudantes não restringiram a base $a \neq 0$ utilizada, tornando a alternativa de explicação dada tão incerta quanto a própria regra em questão. Pode-se associar tais tipos de resposta ao fato destes estudantes serem concluintes do curso e, nessa etapa eles estão imergidos em disciplinas, como Álgebra e Análise, onde as demonstrações lógico-dedutivas são imperativas.

Na Questão 2, adaptada de Ball (1988), esperava-se dos estudantes respostas afirmando que a divisão proposta não é possível de ser realizada justificando matematicamente com o algoritmo euclidiano da divisão e, além disso, fornecendo elementos do seu *repertório básico* que ilustrassem a impossibilidade da divisão, o que poderia ser feito com exemplos concretos ou com contraexemplos numéricos.

Questão 2
Suponha que um estudante lhe pergunte "O que significa a operação 7 dividido por 0?". Como você o responderia?

Nessa questão registrou-se três tipos de resposta: *Tipo1* representa as respostas que contém uma argumentação razoável acerca da impossibilidade da divisão; *Tipo2* representa respostas que possuíam alguma incoerência técnica ou uma explicação pedagógica insuficiente; *Não soube*, representa respostas em branco ou que afirmavam não saber responder. Os dados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1:Tipos de resposta a Questão 2 por período de matrícula

Período	*1º*	*2º*	*3º*	*4º*	*5º*	*6º*	*7º*	*8º*	*Concluintes*
Tipo1	10,0%	0,0%	28,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	33,3%
Tipo2	70,0%	83,3%	71,4%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	50,0%	66,7%
Não soube	20,0%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	0,0%

Fonte: Dados da pesquisa

Esses dados indicam que apenas os estudantes do 1º, 3º, 8º períodos e os concluintes elaboraram uma argumentação razoável para a divisão por zero. Como os índices do 3º, do 8º período e dos concluintes são aproximados e não há uma regularidade com os índices dos outros períodos, deduz-se que os estudantes dos períodos citados podem ter experimentado uma abordagem sobre a divisão de dois números reais de modo diferente da maioria dos estudantes do curso, mais especificamente sobre a divisão por zero. Isso foi inferido considerando haver disciplinas comuns cursadas pelos estudantes do 3º ao 7º período, porém destes só o 3º período registrou resultados do *Tipo1*.

Quanto aos resultados do *Tipo2*, notou-se que há dois fatos que levaram os estudantes a cometerem alguma incoerência técnica ou fornecer explicações insuficientes, um deles é a imagem conceitual que eles tem de divisão e também do zero como número, o outro é a fundamentação das definições matemáticas exclusivamente em regras conforme detectado também na Questão 1.

O primeiro fato é exemplificado a seguir:

> *Exemplo 1*
>
> A operação funciona da seguinte maneira. Iremos pegar o número 7 e dividi-lo pelo número 0. O que resulta no próprio número 7, pois como o zero é nulo, ou seja, não representa um "valor". Seria o mesmo que não dividir o sete. Ex: Se você tem 7 lápis e tem que dividir com 0 pessoas, ou seja, com nínguém, você ficará com os 7 lápis. (Estudante 34, 2º período, aspas no original)
>
> *Exemplo 2*
>
> Tentaria trazer essa pergunta para algum exemplo do cotidiano dele. Por exemplo, se pegássemos 7 como o número de laranjas e 0 como o número de pessoas. Então como dividir significa também repartir, diria a eles: se repartíssemos sete laranjas entre essas 0 pessoas (no caso não tem pessoas), quantas laranjas cada um ganharia? Como não há nenhuma pessoa então ninguém ganharia nada, ou seja, $\frac{7}{0} = 0$. (Estudante 11, Finalistas)

Observa-se no Exemplo 1 a imagem conceitual do zero como número para o Estudante 34 que revelou não considerar o zero como um "valor" e isto ele fez tentando distingui-lo conceitualmente do número sete, outra situação é que ele incluiu o interlocutor na própria divisão dos sete lápis quando diz que "você ficará com os 7 lápis" e acabou realizando a operação sete dividido por um, ao invés da operação sete dividido por zero solicitada na questão. Já no Exemplo 2, o Estudante 11 demonstrou considerar o zero como uma quantidade nula de pessoas e, ao mesmo tempo, utilizou-o para representar a impossibilidade da divisão quando argumenta "ninguém ganharia nada" e traduziu isso na igualdade (incorreta) da fração apresentada. Essas respostas estão associadas ao aspecto das características essenciais quando fornecem elementos da *imagem conceitual*, porém também demonstram o aspecto do *repertório básico* quando os estudantes recorrem a analogias de exemplos concretos para tentarem explicar a divisão.

A exemplo das respostas que caracterizam o segundo fato, tem-se:

> *Exemplo 1*
>
> A operação não pode ser executada porque não podemos ter "0" (zero) no denominador. (Estudante 52, 4º período, aspas no original)
>
> *Exemplo 2*
>
> Não saberia responder com clareza, no mínimo diria que seria impossível dividir por zero. (Estudante 44, 5º período)

Tais respostas confirmam que, apesar de saberem que a divisão proposta não é possível, estes estudantes não conseguem ir além da simples regra que impossibilita tal divisão, nem estabelecer um critério matemático que justifique tal regra. Isto também é explicado por Ball (1988):

> [..] a maioria dos candidatos a professores, sejam certos ou errados, focados no significado ou em regras, não parecem se referir ao conceito mais geral da divisão para fornecerem suas explicações. Em vez disso, reconheceram a divisão por zero como um caso particular para o qual existia uma regra. (BALL, 1988, p. 76)

Para essa autora, muitos erros são cometidos pelos professores porque eles utilizam regras como explicações matemáticas e, dessa forma, não pensam no significado da operação pois, se o fizessem, controlariam a razoabilidade das suas respostas.

5. Considerações Finais

Essa etapa da pesquisa procurou identificar, especificamente, os conceitos que os estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática possuem sobre a divisão por zero e sobre a indeterminação do tipo 0^0. Tal etapa é parte de uma pesquisa maior que busca examinar os conceitos sobre números e operações que esses estudantes possuem e quais as interferências do curso na formação desses conceitos.

Diante das observações feitas nessa etapa, percebeu-se que a maioria desses estudantes fundamentaram seus conceitos em regras operacionais memorizadas ainda na educação básica e, pelas respostas analisadas, é razoável admitir que o uso indistindo dessas regras ocasionaram um certo entrave no desenvolvimento das competências numéricas na maioria dos sujeitos pesquisados pois eles não conseguiram perceber ou explicar o caso de indeterminação do tipo 0^0. O mesmo ocorreu em relação à divisão por zero, onde a maioria dos estudantes aceitaram ser suficiente a regra "é impossível dividir por zero" e não procuraram explicá-la de outra maneira e nem utilizaram argumentos matemáticos como o algoritmo euclidiano da divisão, por exemplo.

Esperava-se que o desempenho das respostas apresentadas pelos estudantes que cursaram uma maior quantidade de períodos letivos revelassem conceitos numéricos mais ampliados do que os estudantes com menor quantidade de períodos letivos cursados. Contudo,

ISSN 2178-034X

à medida que as respostas do teste eram examinadas, constatou-se que os mesmo problemas detectados nos estudantes dos períodos iniciais do curso se manifestavam em todos os outros períodos. Isso aponta uma necessidade de se detectar quais conhecimentos matemáticos que os estudantes possuem sobre assuntos como esses aqui pesquisados e buscar maneiras de tornar efetiva a contribuição da formação inicial do professor de matemática nos conteúdos que serão utilizados por eles na sua prática escolar.

6. Referências

BALL, D. L. **Knowledge and Reasoning in Mathematical Pedagogy:** Examining What Prospective Teachers Bring to Teacher Education. Michigan: Departament Of Teacher Education. Michigan State University, v. Tese de Doutorado, 1988.

EVEN, R. **Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions**. Educational Studies in Mathematics, n. 21, p.521-544. 1990.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. D. C. C. **O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?** Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), 27, n. 47, p. 917-938. dezembro 2013.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. Lisboa: SPM, v. I. Parte I. Aritmética, 2009.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MOREIRA, P. C. **O Conhecimento Matemático do Professor:** Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica. Tese (Doutorado em Educação). Belo Horizonte: Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A Formação Matemática do Professor:** Licenciatura e Prática Docente Escolar. 1ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007..